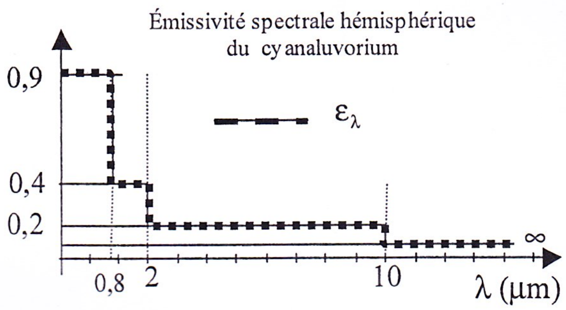
EEIGM-ENSGSI **Examen Transferts Thermiques:** **Mercredi 4 mai 2005**

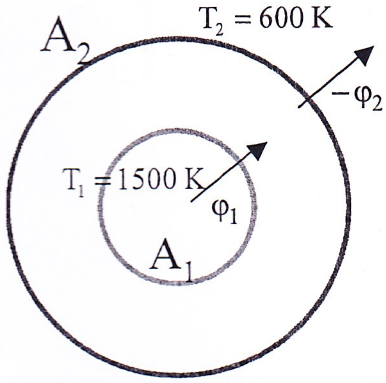
Année 2004/2005

Durée : 1h30
Documents non autorisés
Calculatrice autorisée.

EXERCICE 1 : ECHANGE RADIATIF ENTRE PAROIS NON GRISES
(temps approximatif 30 mn)

On considère le cas simple de l'échange radiatif entre deux parois de surfaces A_1 et A_2.
La paroi 1 est à la température imposée $T_1 = 1500\ \mathrm{K}$. La paroi 2 est à la température imposée $T_2 = 600\ \mathrm{K}$. Les parois sont constituées du même matériau, le cyanaluvorium, et sont considérées comme non grises, c'est-à-dire qu'il faut prendre en compte le fait que l'émissivité hémisphérique change avec la longueur d'onde du rayonnement. Le spectre ci-dessous représente l'évolution idéalisée de l'émissivité du matériau en fonction de la longueur d'onde.





On donne l'expression du flux radiatif net échangé entre les deux parois dans le cas où la surface 2 est à réflexion diffuse (et non spéculaire):

$$\varphi_{net_{1\to 2}} = \varphi_1 = -\varphi_2 = \int_{\lambda=0}^{\infty} d\varphi_\lambda = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{e_{b_{\lambda,1}}(\lambda, T_1) - e_{b_{\lambda,2}}(\lambda, T_2)}{\dfrac{1}{\varepsilon_{\lambda,1}(\lambda, T_1)} + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{\lambda,2}(\lambda, T_2)} - 1\right)} d\lambda$$

où l'on notera que le caractère non gris du comportement de l'émissivité est pris en compte à travers l'intégrale sur les longueurs d'ondes. La dépendance de l'émissivité en fonction de la longueur d'onde se faisant par une fonction constante par morceaux, l'intégration se résume à une sommation évidente.

1 – Donner la définition de l'émissivité spectrale (pour une longueur d'onde λ quelconque) d'une surface opaque (phrase écrite et formule).

Réponse : $\varepsilon(\lambda,T)=\dfrac{e_{\lambda,T}}{e^{b}_{\lambda,T}}=\dfrac{\text{émittance du corps réel}}{\text{émittance du corps noir}}<1$ *Voir diapo cours*

Le coefficient d'émissivité traduit la fraction (en %) d'énergie émise par la surface d'un corps réel en comparaison avec celle (maximale) que peut émettre l'émetteur parfait (idéal).

2- Compte tenu de ce que vous savez des caractéristiques du corps noir :

2-a Quelles sont les bandes spectrales à prendre en compte pour que le calcul du flux échangé soit correct ? Expliquer.

Réponse : Pour la température T_1, $\lambda_{max}=2\,\mu m$ par conséquent 95% de l'énergie est comprise entre $1\,\mu m$ et $10\,\mu m$. La première bande spectrale $\lambda<0.8\,\mu m$ n'est donc pas à prendre en compte pour le calcul (contribution trop faible). On ne prend en compte que trois bandes spectrales a, b, c.

2-b On appelle $F_1^a, F_1^b, F_1^c, F_2^a, F_2^b$, et F_2^c, les fractions d'énergie émises par le corps noir aux températures T_1 et T_2 dans les trois bandes spectrales a, b et c retenues et classées par ordre de grandeur croissante en longueur d'onde.

- Valeur de F_1^a ? *Réponse : 0.25 (zone $[0,\lambda_{max}]$)*
- Valeur de F_1^b ? *Réponse : 0.75 (zone $[\lambda_{max}, 5\lambda_{max}]$)*
- Valeur de F_1^c ? *Réponse : 0 (évidemment)*
- Valeur de F_2^a ? *Réponse : 0 (bande spectrale $<0.5\lambda_{max}$)*
- Calculer la valeur de F_2^b grâce à l'abaque *Réponse :* $F_{1200-6000}\cong F_{0-6000}\cong 0.75$ *(Calcul donne 0.738)*
- Valeur de F_2^c ? *Réponse : le complément à 1 évidemment soit 0.25 (Calcul = 0.262)*

3 – Calculer le flux net échangé $\varphi_{net_{1\to2}}$ $(W\cdot m^{-2})$ en considérant que les surfaces 1 et 2 sont infiniment proches l'une de l'autre (cas plan).

Réponse :

$$\varphi_{net_{1\to2}}==\int_{\lambda=0}^{\infty}\frac{e_{b_{\lambda,1}}(\lambda,T_1)-e_{b_{\lambda,2}}(\lambda,T_2)}{\dfrac{1}{\varepsilon_{\lambda,1}(\lambda,T_1)}+\dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{\lambda,2}(\lambda,T_2)}-1\right)}d\lambda=\sum_{i=1}^{\text{Nbre bandes}}\frac{F_1^i e_{b1}-F_2^i e_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_i}+\dfrac{1}{\varepsilon_i}-1}$$

Pour la bande a : $$\varphi^a_{net_{1\to2}}==\frac{F_1^a e_{b1}-F_2^a e_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_a}+\dfrac{1}{\varepsilon_a}-1}=\frac{0.25x\sigma x1500^4-0}{\dfrac{1}{0.4}+\dfrac{1}{0.4}-1}=35880\quad W/m^2$$

Pour la bande b : $\varphi^{b}_{net_{1\to2}} = \dfrac{F_1^b e_{b1} - F_2^b e_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_b}+\dfrac{1}{\varepsilon_b}-1} = \dfrac{0.75(\sigma\times1500^4 - \sigma\times600^4)}{\dfrac{1}{0.2}+\dfrac{1}{0.2}-1} = 23310 \quad W/m^2$

Pour la bande c : $\varphi^{c}_{net_{1\to2}} = \dfrac{F_1^c e_{b1} - F_2^c e_{b2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_c}+\dfrac{1}{\varepsilon_c}-1} = \dfrac{0-0.25\times\sigma\times600^4}{\dfrac{1}{0.1}+\dfrac{1}{0.1}-1} = -63 \quad W/m^2$

Le flux total est donc de 59190 W/m^2

4 – En imaginant que les parois 1 et 2 soient cylindriques ou sphériques et que les rayons r_1 et r_2 ne soient pas infiniment proches, quelle est l'influence de ces deux géométries sur le flux transféré <u>comparé au cas plan</u>, tout étant égal par ailleurs ?

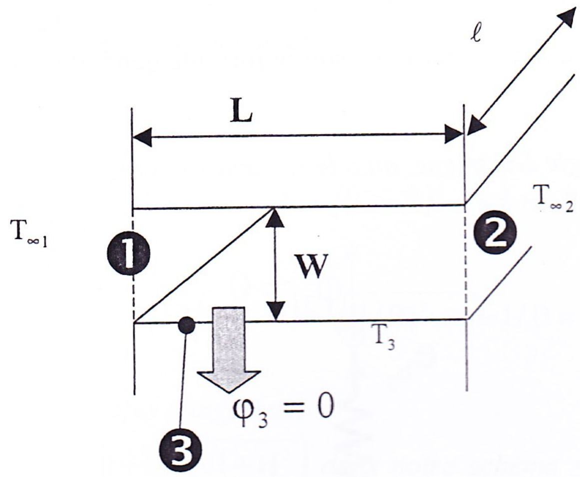
Réponse :

$\varphi_{net_{1\to2}} = \dfrac{e_{b_1} - e_{b_2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)} = \dfrac{e_{b_1} - e_{b_2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+K\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}$ *avec* $K = \dfrac{r_1}{r_2}$ *ou* $K = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2$ *et donc K<1. Par conséquent le dénominateur sera toujours minoré par rapport au cas plan. Le flux transféré sera toujours plus grand dans ces géométries par rapport au cas plan, le cas sphérique étant le plus défavorable.*

Remarque: si la paroi 2 est noire, cela ne change rien !

EXERCICE 2 : Fissure dans un four
(temps approximatif 1 heure)

Le schéma ci-dessous représente une fissure plane dans la paroi d'un four et que nous considérons comme formant une cavité prismatique (largeur ℓ unitaire dans la direction perpendiculaire au dessin).
La longueur de la fissure L correspond à l'épaisseur de la paroi du four. La hauteur de la fissure est notée W. La paroi du four est un matériau réfractaire considéré à émission diffuse et grise. Etant donné la nature isolante de ce matériau, on considérera en première approximation que $\varphi_3 = 0$. Les températures des ambiances à l'intérieur et à l'extérieur du four sont respectivement à $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$.



a) On va chercher à exprimer le flux net perdu par le four et transféré par la fissure. Justifier par les éléments vus en cours sur l'interaction rayonnement thermique – surface opaque, le fait que l'on écrive le flux net transféré comme $\varphi_{net_{1\to 2}} = \varphi_1 = -\varphi_2$ où φ_1 et φ_2 représentent les densités surfaciques de flux de chaleur algébriques (cédées ou gagnées) par les surfaces 1 et 2.

Réponse : φ désigne un flux de chaleur (en W/m^2) traversant une paroi, exprimé comme résultat d'un bilan de flux radiatifs échangés. En cours, on a vu que $\varphi = J - G = \varepsilon e^b - \alpha G$. Si $\varphi > 0$, on est dans la situation où un flux thermique est 'apporté' à la paroi (par un mécanisme quelconque) et la quitte par un mécanisme de rayonnement où l'émission l'emporte sur l'absorption du rayonnement incident.
Dans ce pb, $T_1 > T_2$ et l'on sait que le flux net passe donc de 1 vers 2. Ce flux net est égal à φ_1, le flux quittant la paroi 1 (Compté positivement par convention). Par conservation du flux en régime permanent, ce flux radiatif est apporté à la paroi 2 pour laquelle G_2 est nécessairement supérieur à J_2. Par conséquent la définition $\varphi_2 = J_2 - G_2$ conduit à une valeur négative d'où $\varphi_{net_{1\to 2}} = \varphi_1 = -\varphi_2$.

b) Question de cours : comment considère-t-on le comportement vis à vis du rayonnement d'une ouverture de cavité rayonnante sur une ambiance matérielle à température uniforme T_∞.

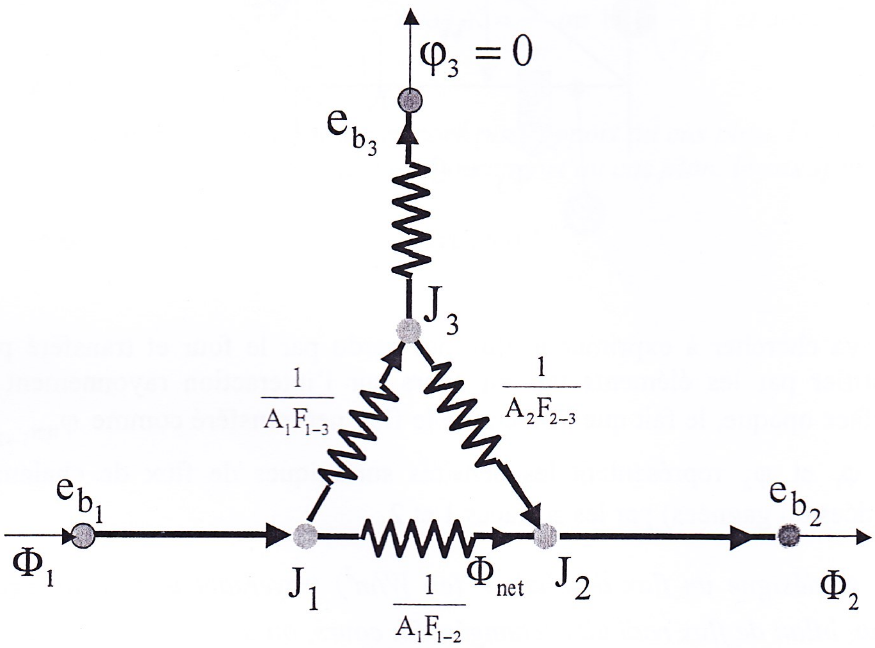
Réponse : on considère que la surface ' manquante' pour fermer la cavité est une paroi noire, dont la température est T_∞.

c) En supposant que la paroi de la fissure est à température uniforme T_3 (et donc à radiosité uniforme), établir l'expression du flux perdu par le four soit φ_1 en fonction du facteur de forme F_{1-2}. On donnera en fait l'expression de $\dfrac{\varphi_1}{e_{b_1} - e_{b_2}}$.

On utilisera soit l'analogie électrique, soit la formule générale annexée au document.

Réponse :

- *Par l'analogie électrique, on a le schéma suivant :*



Soit $e_{b_1} - e_{b_2} = R\Phi_1$ *avec R, résistance radiative correspondant au schéma parallèle ci-dessus. On a donc* $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_{1-2}} + \dfrac{1}{R_{1-3} + R_{2-3}} = A_1F_{1-2} + A_1\dfrac{F_{1-3}}{2}$ *or* $F_{1-3} = 1 - F_{1-2}$ *d'où*

$R = \dfrac{2}{A_1(1 + F_{1-2})}$ *ce qui conduit à* $\dfrac{\varphi_1}{e_{b_1} - e_{b_2}} = \dfrac{1 + F_{1-2}}{2}$

- *Par l'utilisation de la formule donnée en annexe 3, on a pour k=1 et k=3 :*

$$\varphi_1 = e_{b_1} - F_{1-2}e_{b_2} - F_{1-3}e_{b_3}$$

$$0 = e_{b_3} - F_{3-1}e_{b_1} - F_{3-2}e_{b_2} - F_{3-3}e_{b_3}$$

Ceci conduit à $\varphi_1 = e_{b_1} - F_{1-2}e_{b_2} - (1-F_{1-2})\dfrac{F_{3-1}(e_{b_1}+e_{b_2})}{2F_{3-1}} = \dfrac{(1+F_{1-2})(e_{b_1}-e_{b_2})}{2}$ *CQFD*

d) Exprimer le résultat précédent en fonction du rapport d'aspect L/W

Réponse : A l'aide des formules C2 ou C3, on trouve

Pour C2, c'est direct

La formule donne $F_{1-2} = \dfrac{1}{2B}\left(\sqrt{(B+C)^2+4} - \sqrt{(C-B)^2+4}\right)$ *or B=C dans notre cas soit*

$$F_{1-2} = \frac{1}{2B}\left(\sqrt{4B^2+4} - \sqrt{4}\right) = \frac{1}{B}\left(\sqrt{B^2+1} - 1\right) = \sqrt{(1/B)^2+1} - 1/B = \sqrt{1+(L/W)^2} - L/W$$

Pour C3, c'est indirect et en plus dangereux.
La formule donne $F_{3-1} = \dfrac{1}{2}\left(1+H-\sqrt{1+H^2}\right)$ *dans notre schéma sauf que le ½ vient du fait qu'il n'y a qu'une surface 3 considéré or il y en a 2 se faisant face dans notre problème.*
Il faut donc considérer que $F_{3-1} = \left(1+H-\sqrt{1+H^2}\right)$. *On a donc*

$$F_{1-2} = 1 - F_{1-3} = 1 - \frac{A_3F_{3-1}}{A_1} = 1 - \frac{F_{3-1}}{H} = \frac{H - \left(1+H-\sqrt{1+H^2}\right)}{H} = \frac{\sqrt{1+H^2}-1}{H} = \sqrt{1+(L/W)^2} - L/W$$

e) Le résultat est-il correct dans la limite $L/W \to 0$? Quelque soit la réponse, expliquer pourquoi.

Réponse : $W \to \infty$ *on ne parle plus de fissure, on a deux plans en incidence totale donc* $F_{1-2} \to 1$, *le résultat est correct.*

f) Le résultat est-il correct dans la limite $L/W \to \infty$? Quelque soit la réponse, expliquer pourquoi.

Réponse : $W \to 0$ *la fissure est extrêmement étroite et l'on doit avoir un flux nul perdu par le four or le calcul donne* $F_{1-2} \to 0$ *soit* $\dfrac{\varphi_1}{e_{b_1}-e_{b_2}} = \dfrac{1}{2}$. *Ce n'est pas correct. Cela tient au fait qu'on considère que* T_3 *uniforme sur la paroi de la fissure, ce qui est évidemment faux. En*

divisant en 2 la surface ❸ et en associant deux températures, on vérifie que la valeur du flux perdue pour $W \to 0$ *diminue bien.*

g) Calculer la température T_3 sachant que $T_1 = 2000K$ *et* $T_2 = 300K$

Réponse : on trouve que $e_{b_3} = \dfrac{e_{b_1} + e_{b_2}}{2}$ *soit* $T_3 = 1682K$

Documents annexés :

1) Courbe donnant la fraction d'énergie émise par un corps noir à une température T donnée de 0 à λT

2) Formules de Facteurs de forme

3) Formule de l'échange radiatif en cavité pour des surfaces à émission et réflexion diffuse.

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\delta_{kj}}{\varepsilon_k} - F_{k-j}\frac{1-\varepsilon_j}{\varepsilon_j}\right]\frac{\phi_j}{S_j} = \sigma T_k^4 - \sum_{j=1}^{N} F_{k-j}\sigma T_j^4 = \sum_{j=1}^{N} F_{k-j}\sigma\left(T_k^4 - T_j^4\right)$$